

609929

6

RELAZIONI

DI ALLINEAMENTO

NEI PUNTI DELLE CURVE ALGEBRICHE

NOTA

DEL PROF. GIUSTO BELLAVITIS

MEMBERO EFFETTIVO PENSIONARIO DELL' I. R. ISTITUTO VENETO
DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI

(Estr. dal Volume VIII delle Memorie dell' Istituto stesso)



VENEZIA

PRESSO LA SEGRETERIA DELL' I. R. ISTITUTO
NEL PALAZZO DUCALE

1860

NEL PRIV. STAB. NAZ. DI G. ANTONELLI



RELAZIONI



DI

ALLINEAMENTO NEI PUNTI DELLE CURVE ALGEBRICHE



1. Nell'anno 1854 ebbi l'onore di presentare a questo i. r. Istituto e di pubblicare nei suoi Atti una nota *Intorno alla teoria degli allineamenti* data dal Grassmann: soltanto in questi giorni venni a conoscere che questo Geometra avea pubblicato nel *Giornale di matematica* del Crelle (1856) una nuova memoria *Sulla generazione lineale delle curve del 3.^o ordine*, nella quale data l'occasione di esaminare la mia predetta nota, aggiungeva importanti osservazioni sulle varie maniere di allineamento che possono qualificare in tutta la generalità nna qualunque di quelle curve. — Io debbo prima di ogni altra cosa riconoscere che la ragione è dalla parte del Geometra di Stettino quand'egli impugna una troppo estesa asserzione contenuta nella mia nota; ecco in che consisteva il mio errore: in quel tempo il Chasles avea data nna costruzione della curva del 3.^o ordine (*tritoma*) passante per 9 punti dati comunque; le costruzioni precedentemente pubblicate dal Grassmann insegnavano a costruire una tritoma conoscendone 9 punti, ma questi erano tra loro legati da speciali condizioni, che toglievano parte della generalità; sicchè se io mi fossi limitato ad osservare che il Chasles diede la prima soluzione del problema di costruire la tritoma di 9 punti, credo che avrei detto il vero, poichè il Grassmann pubblicò la sua soltanto nel 1856; fu, al contrario, incosatto il dire che le formule da lui proposte non fossero abbastanza generali per rappresentare qua-

lunque tritoma; infatti data una di queste curve (non già 9 suoi punti) si possono in infinite maniere determinare gli elementi di alcuna delle formule del Grassmann, la quale rappresenterà poi tutti i punti della curva.

2. Quantunque non possa occuparmi di un esteso lavoro sull'argomento, pure credo utile di richiamare su di esso l'attenzione dei Geometri Italiani; cercherò di darvi la maggior semplicità allontanando ogni idea ed ogni segnatura, che dipendendo da teorie più generali esposte dal Grassmann in apposita opera, potrebbero dare un aspetto di stranezza o di oscurità a considerazioni rigorosamente geometriche.

3. *Convenzioni.* Se colle lettere majuscole $A B$ ecc. s'indicano dei punti, con AB si segnerà la retta indefinita, che passa pei punti $A B$, senza badare alla lunghezza della porzione compresa tra i due punti; così pure se $a b$ ec. sono altrettante rette, il segno ab indicherà il punto d'intersezione delle due rette, senza badare all'angolo ch'esse comprendono. Queste due convenzioni adoperate più volte di seguito danno origine a formule più complicate, il cui significato si apprenderà facilmente dai seguenti esempi: ABc significa il punto d'intersezione della retta AB colla retta c , abC è la retta, che passa pel punto ab e pel punto C , $ABcD$ indica la retta del punto ABc precedentemente definito e del punto D . $AB(CD)$ è il punto d'intersezione della retta AB colla retta CD ; $hM(ABcD)$ indica il punto comune alla retta, che congiunge il punto h col punto M , ed alla retta $ABcD$; per costruire $A(bc)[de(fg)]H$ colla retta, che unisce A con bc , si taglia la retta, che unisce de con fg , e dal loro punto d'intersezione si tira una retta al punto H ; ecc. — Le due *parti* di una formula sono quelle che furono riunite in ultimo luogo; così le due parti di ABc sono le rette AB e c ; quelle di $A(bc)[de(fg)]H$ sono i due punti H e $A(bc)[de(fg)]$, e questo si decompone ancora nelle due parti $A(bc)$ e $de(fg)$, le parti delle quali sono A e bc , e de e fg .

4. Due punti sono *coincidenti* quando formano un solo punto; due rette le diremo *coincidenti* quando una cade sull'altra, e ciò senza menomamente badare alle loro lunghezze. Così con $abC||DE$, che leggeremo abC *coincidente* DE indicheremo che la retta abC cade sulla DE , cioè che i quattro punti $ab C D E$ sono in una medesima retta, sieno d'altronde quali si vogliano le loro distanze rispettive.

5. Una *formula* risulta (§ 3) dalla successiva unione di due punti o di

due rette: se avvenga che due punti che debbono unirsi, o due rette che deggiono intersecarsi, sieno coincidenti, la formula diventerà *indeterminata*. Così, per es., la formula $abC(DE)$ sarà indeterminata se sia $abC \parallel DE$, ed anche se sia $a \parallel b$, oppure $ab \parallel C$, oppure $D \parallel E$. Infatti è palese che nel primo caso la formula esprime un punto qualunque della retta DE ; nel secondo caso ab è un punto qualunque della retta a , quindi abC è una retta qualunque passante per C , ed $abC(DE)$ è un punto qualsivoglia della retta DE ; ecc.

6. Dico che un punto è *congruente* ad una retta, e questa è *congruente* a quello, quando il punto appartiene alla retta, ossia la retta passa pel punto. — Tre o più punti si diranno *congruenti*, ossia allineati, quando appartengono ad una medesima retta; così pure tre o più rette si diranno *congruenti*, quando concorrono in un medesimo punto. — Una congruenza si supporrà soddisfatta anche se uno dei suoi due membri è una formula *indeterminata* (§ 5). Così sarà $abC \text{ congr. } M$ non solo se la retta abC passi pel punto M , ma anche se abC sia indeterminata, cioè se $a \parallel b$, oppure se $ab \parallel C$.

7. *Canoni*. Bisogna rendersi abituali alcuni canoni, la cui verità riesce evidente dalle cose dette e da figure di facile costruzione.

I. Le due *parti* (§ 3) di una formula che deggiono insieme unirsi possono a piacere tra loro permutarsi senza che la formula cangi di significato. Così, per es., alla $ABcD$ sono identiche le $BAcD$, $c(AB)D$, $D[c(AB)]$, ec.

II. Una coincidenza separando un membro nelle sue due parti dà due congruenze. Così, per esempio, se $ABc(de) \parallel MN$ sarà $ABc \text{ congr. } MN$ ed anche $de \text{ congr. } MN$. In generale diremo che (II) $PQ \parallel r$ dà $P \text{ congr. } r$, $Q \text{ congr. } r$; intendendo con P Q r tanto semplici elementi quanto formule comunque composte.

III. Viceversa, un elemento congruente con due altri (non coincidenti) coincide coll'unione di questi. Cioè se $P \text{ congr. } r$ e $Q \text{ congr. } r$ sarà (III) $PQ \parallel r$, purchè non sia $P \parallel Q$.

IV. Se in una congruenza si separa un membro nelle sue due parti si hanno tre membri tra loro congruenti. Così se (IV) $AB \text{ congr. } C$, saranno *congruenti* $A . B . C$, cioè questi sono (§ 6) tre punti in linea retta. Per altro esempio se $abCd \text{ congr. } efG$ saranno *congruenti* le tre rette $abC . d . efG$, ed anche i tre punti $abCd . ef . G$. Non si potrebbe separare ab da Cd perchè queste non sono (§ 3) le due parti della formula $abCd$.

La congruenza di tre punti o di tre rette è segnata dal Grassmann così

$$A.B.C || 0 \quad , \quad abC.d.efG || 0 \quad ;$$

noi scriveremo invece $A.B.C$ congruenti, ecc.

V. Viceversa, una congruenza di tre membri (cioè (§ 6) tre punti *allineati* o tre rette *concorrenti* insieme) porta la congruenza tra un membro e l'unione degli altri due. Così se (V) $P.Q.R$ congruenti si ha P congr. QR , Q congr. PR , R congr. PQ . Per altro esempio $abC.d.efG$ congruenti darà abC congr. $efGd$, d congr. $efG(abC)$, ec. — Al calcolo delle congruenze servono in principal modo i tre canoni seguenti.

VI. In ogni congruenza fra due membri una delle due parti di un membro può trasportarsi a ultimo termine dell'altro membro; questo trasporto può ripetersi più volte. Così (VI) PQ congr. R dà P congr. RQ , che pel I canone è identico con QR . Per esempio $ab(CDe)$ congr. F dà ab congr. $F(CDe)$.

VII. Una formula, che non sia (§ 5) *indeterminata*, può semplificarsi quando una delle sue due parti sia congruente ad una delle due parti dell'altra parte, giacchè la formula si riduce a questa parte della seconda parte ch'è congruente colla prima parte, cioè se (VII) P congr. p si ha $PQp || P$, purchè non sia PQp indeterminata. Questo canone riesce evidente (come tutti i precedenti) osservando che la retta PQ incontra la retta p nel punto P ad essa appartenente. Altri esempi di questo canone, premettendo sempre la supposizione che la formula sia determinata, sono $AB(CB) || B$, $ABcD[E(ABc)] || ABc$, $ABcDeD || ABcD$, $ABcD(DE) || D$.

VIII. Separando una formula nelle sue due parti, e la prima di esse ancora in due, e finalmente la prima di queste ancora in due, avremo ciò che, per l'ordine con cui sogliono scriversi, diremo 1.°, 2.°, 3.° e 4.° elemento della formula; ciò posto, se una formula determinata sia congruente al primo elemento, questo sarà congruente al terzo, oppure all'unione del secondo col quarto. Cioè se (VIII) A congr. $ABcD$ sarà A congr. c , oppure A congr. BD , purchè non sia $ABcD$ indeterminata. — Viceversa, se A congr. c il canone VII darà $ABc || A$, poscia $ABcD || AD$ congr. A ; che se invece A congr. BD sarà (VI) AB congr. D , e poi (VII) $ABcD || AB$ congr. A .

8. Per dimostrare il *teorema fondamentale sulla generazione delle curve algebriche* ricordiamo da prima i principii generali relativi alle coordinate.

Esprimiamo con (x, y, z) il punto, che ha per coordinate parallele riferite a due assi i rapporti $x:z \ y:z$; sarà $ux + vy + wz = 0$ l'equazione di una retta, che sarà data ove si conoscano i rapporti tra le quantità u, v, w ; noi la indicheremo con $[u, v, w]$. Supponiamo che i due punti $X \ A$ sieno rispettivamente espressi da $(x, y, z) \ (a, b, c)$, la retta XA determinata dai medesimi sarà $[u, v, w]$ essendo

$$u = cy - bz, \quad v = az - cx, \quad w = bx - ay.$$

E se la retta b sia espressa da $[d, e, f]$, il punto d'intersezione XAb sarà espresso da (x', y', z') purchè $x' = fv - ew$, $y' = dw - fu$, $z' = eu - dv$, che se ora vogliamo determinare la retta $XAbX$ espressa da $[u', v', w']$ sarà

$$u' = yz' - zy', \quad v' = zx' - xz', \quad w' = xy' - yx'$$

e, fatte le sostituzioni, le $u' v' w'$ risulteranno funzioni omogenee del secondo grado delle $x y z$ (che possono considerarsi come le coordinate del punto X), e sarà pure omogenea del secondo grado l'equazione $lu' + mu' + nw' = 0$ esprime la condizione che la retta $XAbX$ passi pel punto (l, m, n) ; sicchè, segnando con C quest'ultimo punto, il luogo di tutt'i punti X , che soddisfanno alla congruenza $XAbX \text{ congr. } C$ sarà dato da un'equazione omogenea del secondo grado tra le coordinate $x y z$.

9. Le considerazioni del § precedente estese ad una congruenza quanto si voglia complicata dimostrano che: *Una congruenza la quale contenga n volte il punto variabile X , oltre punti e rette costanti, spetta a tutti i punti X di un luogo dell' n^{esimo} ordine. Similmente: Una congruenza contenente m volte una retta variabile y spetta a tutte le tangenti di una curva, od involuppo, dell' m^{esima} classe, cioè alla quale si possono da ciascun punto condurre m tangenti reali od immaginarie.*

10. *Ditome*, cioè luoghi che sono tagliati da ogni retta in due punti. Le congruenze spettanti ai luoghi di secondo ordine sono tutte riducibili mediante i canoni I e VI alla forma $XAbCd \dots \text{ congr. } X$. — La più semplice (1) $XAbC \text{ congr. } X$ appartiene pel canone VIII al complesso delle due rette b ed AC . — La (2) $XAbCdE \text{ congr. } X$ comprende i cinque punti che ora determineremo; primieramente la congruenza è soddisfatta se XA è indeterminata (§ 5), cioè se $X || A$; — 2.° e 3.° supposto $X \text{ congr. } b$ pel VII canone è $XAb || X$, ed allora la $XCdE \text{ congr. } X$ dà (VIII) $X \text{ congr. } d$ oppure $X \text{ congr. } CE$, quindi abbiamo gli altri due punti $X || bd$, $X || CEb$,

che chiameremo $M || bd$ e $Q || CEb$; — 4.° supposto $XA \text{ congr. } C$, abbiamo (VII) $XAbC || XA$, e la (2) diviene $XAdE \text{ congr. } X$ da cui (VIII) $X \text{ congr. } d$ oppure $X \text{ congr. } AE$; la prima combinata colla (VI) $X \text{ congr. } AC$ dà il nuovo punto $X || ACd || P$. Siccome pel VI canone alla proposta congruenza può darsi la forma $X \text{ congr. } XEdCbA$, così avremo il quinto punto $X || E$, ed i tre già trovati $db || M$, $CAAd || P$, $ECb || Q$.

11. Presi ad arbitrio i cinque punti $A E M P Q$ possiamo determinare gli elementi della precedente congruenza (2): giacchè pei canoni I e II si ha $b || MQ$, $d || MP$, poscia $CE \text{ congr. } Q$, $CA \text{ congr. } P$ danno $C || AP(EQ)$. Viene da ciò che la *ditoma* (sezione-conica) passante pei cinque punti è data dalla congruenza (2) cioè

$$(3) \quad XA(MQ)[AP(EQ)](MP)E \text{ congr. } X.$$

12. Una congruenza più semplice è la

$$(4) \quad XA(EM)C(AM)E \text{ congr. } X$$

essa dipende da quattro soli elementi $A E M C$, sicchè non può servire a costruire la ditoma che passa per cinque punti dati; ma peraltro è ancora abbastanza generale per poter rappresentare una ditoma qualunque. Per semplicità scriviamola così (4) $XAeCaE \text{ congr. } X$, ritenendo sempre che $A \text{ congr. } a$ ed $E \text{ congr. } e$; quando supponiamo $XA \text{ congr. } C$ la $XAaE \text{ congr. } X$ ci dà (VIII) $X || AC(AE)$, e $X || ACa$, i quali sono due punti della retta AC tutti due coincidenti nello stesso punto A , dunque CA è tangente della curva; dicasi lo stesso di CE . Pertanto data una ditoma se ne potranno scegliere ad arbitrio tre punti $A E M$, ed essi insieme alle tangenti $AC EC$ dei due primi saranno i cinque elementi, col cui mezzo la (4) darà la costruzione della curva.

13. Tutte le rette XA (supponendo al solito che X sia variabile, ed A un punto fisso) e tutte le rette $XAbC$ formano intorno ai punti A e C due *stelle* (fasci di raggi) tra loro *omologhe*, perchè i loro raggi corrispondenti s'incontrano nei punti della retta b . (Una serie di punti in linea retta formano ciò che io dico una *punteggiata*, ed una serie di rette passanti per un punto formano una *stella*; se i raggi della stella sono rispettivamente congruenti ai punti della punteggiata, la stella e la punteggiata sono tra loro *prospettive*; due stelle prospettive ad una medesima punteggiata le dico *omologhe*, ed omologhe sono pure due punteggiate prospettive ad una medesima stella :) (potrebbe vedersi il mio *Saggio di Geometria derivata*). — Invece le

rette XA e le rette $XAbCdE$ formano due stelle soltanto tra loro *collineari* (*proiettive* od *omografiche* che vogliam dirsi), perchè tanto l'una come l'altra è omologa colla stella formata dalle rette $XAbC$ (la prima incontrandola nella punteggiata b , e la seconda nella punteggiata d , cioè questa è prospettiva tanto colla stella $XAbC$, che ha il centro C , quanto colla stella $XAbCdE$, che ha il centro E). È noto che l'*intersezione* di due stelle collineari (cioè dei loro raggi corrispondenti) è sempre una ditoma che passa pei loro centri A E ; ed infatti abbiamo or ora veduto che i punti di intersezione X di ciascuna XA colla corrispondente $XAbCdE$, cioè tutti i punti soddisfacenti alla congruenza (2) appartengono ad una ditoma (sezione-conica). — La precedente osservazione ci dispensa dal considerare formule più complicate; giacchè le rette espresse, dicasi per esempio, da $XAbCdEFG$ formano intorno al punto G una stella, la quale è collineare con quella delle rette XA , sicchè l'intersezione delle due stelle sarà una ditoma, e scegliendo su di essa tre punti, oltre i A G , potremo (§ 14) rappresentare la seconda stella colla formula più semplice $XAhKIG || XAbCdEFG$.

14. Le date congruenze servono a determinare, mediante semplici allineamenti, quanti si vogliano punti di una ditoma qualunque. Si può anche trovare il secondo punto, nel quale la curva è tagliata da una retta condotta per un punto già conosciuto della ditoma. Così, per esempio, se si voglia il punto in cui la ditoma è di nuovo tagliata dalla retta CM si muterà A in M , e gioverà cangiare eziandio M in E ed E in A , perchè allora la (3) diventa

$$XM(EQ)[MP(AQ)(EP)A \text{ congr. } X$$

che esseudo $XM || CM$ diventa (VII), a motivo di $EQ \text{ congr. } C$, $C[MP(AQ)](EP)A \text{ congr. } X$, perciò il punto cercato è $C(AQd)(EP)A(CM)$.

15. Le precedenti formule danno facili costruzioni anche delle *tangenti* alle curve descritte; così nella ditoma espressa dalla (2) $XAbCdE \text{ congr. } X$, la tangente a nel punto A è subito data, osservando che quando X è infinitamente vicina ad A la retta XA è appunto la tangente a , e perciò la (2) dà $abCdE \text{ congr. } A$, da cui pel canone VI si ottiene $a \text{ congr. } AEbCb$, e perciò $a || AEbCb$. Similmente la tangente in E è $e || EAbCdE$. — La m tangente alla ditoma nel punto $M || bd$ si trova essere $m \text{ congr. } ACb(CED)(AE)$; ma non veggio come essa si possa dedurre dalla (2). Così pure nei punti $P || ACd$, $A || CEb$ le tangenti sono $p \text{ congr. } ACb(AEd)(CE)$, $q \text{ congr. } CEb(AEb)(AC)$. Per un qualunque altro

punto X della ditoma la tangente si determina mediante l'una o l'altra delle congruenze $x \text{ congr. } XAb[CEbX(AC)]d$, $x \text{ congr. } XEd[ACdX(CE)]b$.

16. *Tritome*. Le congruenze che, secondo il § 9, esprimono una *tritoma* (curva del terzo ordine) possono ridursi pei canoni I, IV, V, VI alla congruenza fra tre formule, ciascuna delle quali abbia per primo elemento il punto X della curva; così le varie congruenze delle tritome possono distinguersi mediante i tre numeri che indicano quanti elementi costanti susseguono alla X in ciascheduna delle tre formule; essi sono pari se la congruenza è fra tre punti, e tutti tre dispari se si hanno tre rette insieme concorrenti. — Secondo l'osservazione fatta al § 13, se uno di questi numeri fosse 7, la formula si potrebbe semplificare riducendola a contenere 5 soli elementi costanti, continuando ad esprimere la medesima stella. — Similmente la formula $XAbCDEf$ esprime una serie di punti posti sulla retta f che è *correlativa* coi raggi della stella, che ha il centro A , (vale a dire la *punteggiata* f potrebbe trasportarsi in posizione *prospettiva* rispetto alla stella A , in guisa che ciaschedun raggio di questa passasse pel punto corrispondente di quella), e determinata una stella C_i che sia *prospettiva* colla *punteggiata* f , e nello stesso tempo *omologa* colla stella A , cioè tale che i suoi raggi incontrino i corrispondenti della stella A nei punti di una retta b_i , alla formula $XAbCdEf$ potrà sostituirsi la $XAb_iC_i f$ contenente quattro soli elementi costanti.

17. Quanto abbiamo superiormente asserito ammette peraltro eccezione; infatti si supponga che la retta f sia tagliata dai raggi della stella A , avremo sulla medesima retta due *punteggiate* tra loro collineari; esse hanno, generalmente parlando, due punti *comuni*, ognuno dei quali coincide col proprio corrispondente; e se per uno di essi si tiri comunque la retta b_i , la stella A segnerà su di essa una *punteggiata* collineare alla f ed anche omologa, perchè esse si tagliano in un loro punto comune, e il loro centro d'omologia sarà il cercato punto C_i . Ma può avvenire che i due punti *comuni* alla due *punteggiate* sovrapposte sulla f sieno immaginari, ed in tal caso la supposta riduzione della $XAbCdEf$ alla $XAb_iC_i f$ sembra impossibile.

18. Non considereremo la *tritoma* espressa dalla *congruenza* dei tre punti $XAbCd$. XFe . X , giacchè pei canoni V, VII essa diventa:

$$XAbCd \text{ congr. } XFeX || X$$

purchè non sia $XFeX$ indeterminata, e quindi comprende la ditoma

$XAbCd$ *congr.* X , e la retta e . — Così una delle formule più semplici è quella distinta dai tre numeri 4, 4, 0, cioè

$$(1) \quad XAbCd.XIIgFe.X \text{ congruenti.}$$

Determiniamo parecchi punti di questa tritoma. La formula $XAbCd$ non può in generale divenire indeterminata se non nel caso di $X||A$, e questo è un punto della tritoma. Se supponiamo X *congr.* b il VII canone riduce la formula $XAbCd$ ad XCd , e ponendola coincidente al terzo membro X risulta dal II canone che X *congr.* d , sicchè abbiamo un altro punto della tritoma che segneremo con $M||bd$. Se XA *congr.* C la formula si riduce a XAd , che posto coincidente con X dà un altro punto $P||ACd$. Cerchiamo il terzo punto R della tritoma posto sulla retta d ; quando X *congr.* d è $XAbCdX||d$, perciò la (1) diviene (VI) X *congr.* $deFgH$ ed il punto cercato è

$$R||deFgHd .$$

Operando in simil maniera sulla formula $XIIgFe$ si trovano gli altri quattro punti della tritoma

$$H , N||ge , Q||HFe , S||deCbAe .$$

Altri punti si possono trovare sulle rette che tagliano la tritoma in due punti già dati; così pel terzo punto sulla retta AH si porrà X *congr.* AH , allora XA ed XH sono coincidenti colla AH , e la (1) diventa X *congr.* $AHbCd(AHgFe)$, che combinata colla X *congr.* AH dà il punto cercato.

19. Il Grassmann considera il caso particolare che $g||b$, allora è facile determinare anche il terzo punto sulla $b||MN$; infatti quando X *congr.* b la

$$(1') \quad XAbCd.XIIbFe.X \text{ congruenti}$$

diventa XCd *congr.* $XFeX||XF$, cioè $XCdF$ *congr.* X , che dà (canone VIII) X *congr.* d oppure X *congr.* CF , così abbiamo un nono punto $L||CFb$. Ora data una qualsivoglia tritoma si scelgano su di essa ad arbitrio i punti M N , coi quali si supponga che coincidano R ed S , le rette d e , che contengono due punti infinitamente vicini M ed R , N ed S , saranno perciò le tangenti della tritoma in M N , le quali la taglieranno in altri due punti, che chiameremo P e Q . La retta MN è la b , ed essa taglierà la curva anche nel punto L , pel quale dee passare la CF , ed a motivo delle $R||M$, $S||N$ prenderemo ad arbitrio sulla d il punto F che ora chiameremo D , onde ricordare ch'esso appartiene alla

d , e la LD taglierà la retta e nel punto C , che ora chiameremo E : le rette PE , QD taglino di nuovo la curva nei punti A ed H , ed avremo la congruenza (1'') $XAbEd.XHbDe.X$ congruenti , la quale è come sopra soddisfatta dai punti A H ; poscia se X congr. b la (1'') diviene XEd congr. $XDeX||XD$, perciò è soddisfatta anche da $X||L||DEb$, ed anche da $M||db$; e siccome $X||bd$ riduce il primo membro della $XAbEdX$ congr. $XHbDe$ indeterminato ed il secondo membro a de , così la d sarà tangente in M ; la (1'') è pure soddisfatta da $P||AEd$. Similmente abbiamo il punto N||be colla tangente e , ed il punto Q||HDe . — I punti della tritoma ch'entrano nella (1'') sono tre sulla retta MP (due sono riuniti in M) e tre sulla NQ , e si possono scegliere gli A H , in guisa che non sieno in linea retta con L , dunque essi nove punti sono sufficienti ad individuare la tritoma ; giacchè se infinite tritome potessero passare pei nove punti vi sarebbe anche un sistema di tre rette.

20. La tangente a nel punto A della tritoma espressa da (1) $XAbCd.XHgFe.X$ congruenti si ottiene subito ponendo a in luogo di XA , ed A in luogo di X , sicchè si ha poi (canoni V e VI)

$$a \text{ congr. } AHgFeAdCb .$$

Per aver la tangente m nel punto M||bd si osservi che posto MHgFe||E la $XAbCDE$ congr. X per un punto X infinitamente vicino ad M non differisce dalla (2) del § 15, e quindi valerà la congruenza m congr. $ACb(CEd)(AE)$ allora trovata. In simil modo potrebbe operarsi pei punti N P Q .

24. Vedemmo al § 13 che l'intersezione dei raggi corrispondenti di due stelle collineari, ma non omologhe, è una ditoma; similmente l'intersezione di una stella e di un fascio di ditome dà una tritoma. La congruenza del § 18 può scriversi (1) $XAbCdX$ congr. $XHgFe$, nel secondo membro tutte le rette XH formano una stella col centro H , la quale è omologa colla stella di centro F , ch'è prospettiva colla punteggiata e ; sia E un punto di questa retta, la (1) diverrà $XAbCdX$ congr. E , ossia $XAbCdE$ congr. X , ed esprimerà una ditoma, che (§ 10) passa pei punti fissi A , M||bd , P||ACd , inoltre pel punto S||edCbAe seconda intersezione della retta e colla ditoma, e finalmente anche pel punto E variabile da una ditoma all'altra. Così tutt'i punti della retta fissa e danno un fascio di

ditome passanti pei quattro punti fissi $S A M P$; ciascuna ditoma è tagliata in un punto X della tritoma dal corrispondente raggio della stella H : la corrispondenza tra la ditoma e il raggio XH essendo stabilita da ciò che la ditoma taglia la retta e , oltre che nel punto fisso S , nel punto variabile E , da cui dipende il raggio $EFgH$. Potrà dirsi che il fascio di ditome $SAMPE$ è *iperprospettivo* (*höhere Perspektivität*) colla punteggiata e (cioè colla serie dei punti E) condotta per uno S dei suoi punti fissi e tagliata dalle ditome; questa punteggiata e è a sua volta prospettiva colla stella F , ch'è omologa alla stella H , sicchè la punteggiata e è *correlativa* colla stella H ; diremo che il fascio delle ditome è *ipercorrelativo* (*höhere Projectivität*) colla stella H ; dunque: *Le intersezioni di una stella e di un fascio di ditome tra loro ipercorrelativi formano una tritoma, che passa pel centro H della stella e pei quattro punti $S A M P$ comuni a tutte le ditome*; l'ipercorrelazione si stabilisce mediante la correlazione della stella colla punteggiata formata dalle intersezioni delle ditome con una retta e condotta ad arbitrio per uno dei quattro punti; e potrà pure stabilirsi mediante la collineazione tra la stella H e quella costituita dalle tangenti alle ditome in uno dei loro punti comuni.

22. Mediante la legge di continuità dal caso di un fascio di ditome con quattro punti comuni si passa al caso di un fascio di ditome con due punti reali comuni ed una secante-ideale comune; colla prospettiva si fa andare all'infinito questa secante e le ditome si riducono a circoli aventi due punti comuni: prendendo uno di questi per centro d'*inversione* il fascio di circoli è *inverso* d'una stella, i cui raggi formano angoli eguali a quelli sotto cui si tagliano i circoli (cioè la stella è uguale a quella formata dalle tangenti in uno dei due punti comuni); dunque ogni stella ipercorrelativa col fascio di circoli è collineare colla stella *inversa* del medesimo. Ritorniamo col pensiero alla figura primitiva, e ricordando che la *trasformazione*, di cui l'*inversione* è un caso particolare, è quella (Saggio di Geom. derivata § 110) per la quale ad ogni retta corrisponde una ditoma, che passa per tre punti *cardinali*, sicchè le trasformate dei raggi di una stella formano un fascio di ditome con quattro punti comuni (cioè i tre cardinali e quello ch'è trasformato del centro della stella), vedremo che ogni stella ipercorrelativa di un fascio di ditome è correlativa anche colla stella, che mediante la trasformazione dà il fascio di ditome.

23. L'osservazione fatta al principio del § precedente dà una costruzione

facilissima: un fascio di circoli con due punti comuni viene tagliato da una stella ad esso ipercorrelativa (qual è, per esempio, una stella i cui angoli sieno eguali a quelli sotto cui si tagliano i circoli), cioè ogni circolo del fascio taglia il raggio corrispondente della stella, e si ottiene una tritoma, la quale passerà pel centro della stella e pei due punti comuni ai circoli, ed avrà all' infinito un solo punto reale, la retta all' infinito essendone inoltre secante-ideale comune con un circolo qualunque. Sicchè se avvenga che la tritoma si decomponga in una retta ed una ditoma, questa sarà sempre un circolo.

24. Una congruenza alcun poco più semplice della (1) è la

$$(2) \quad XAbC.XDeF.XK \text{ congruenti}$$

indicata dai tre numeri 3, 3, 1. Questa congruenza di tre rette può esprimersi dicendo che X è il vertice di un quadrilatero, i cui lati e la diagonale passante per X girano ripettivamente intorno ai punti $A C F D K$, mentre i due vertici adjacenti ad X scorrono sulle rette b e c . Appartengono evidentemente alla tritoma i tre punti $A D K$, che sostituiti in luogo di X rendono indeterminato uno dei tre membri della (2). Per determinare i punti che sono sulla retta b porremo $X \text{ congr. } b$, il che rende (VII) $XAbC||XC$; poscia se $XC(XK)$ è indeterminato si ha $X \text{ congr. } CK$ e quindi abbiamo il punto $M||CKb$, altrimenti è (VII) $XC(XK)||X$ ed allora la (2) diventa $X \text{ congr. } XDeF$, quindi pel canone VIII si hanno gli altri due punti $L||be$, $P||DFb$. Precisamente nello stesso modo si trovano sulla retta c i punti $N||FKe$, $Q||ACe$. I sei punti $A D K M N P Q$ sono sufficienti a determinare gli elementi della congruenza (2), giacchè

$$b||MP, \quad c||NQ, \quad C||KM(AQ), \quad F||KN(DP);$$

nulladimeno la (2) può dare, come lo dimostrò il Grassmann, una tritoma qualsivoglia. Ponendo $XA \text{ congr. } C$ si ha $XDeF \text{ congr. } XK(XA)||X$ perciò (VIII) si ha un altro punto della tritoma $I||AC(DE)$. Sopra la data tritoma si scelgano ad arbitrio i punti $I L P Q K$ e le rette $IP IQ LP LQ$ taglino di nuovo la curva nei punti $D A M N$; saranno come sopra determinati gli elementi della congruenza (2); i nove punti $I L P Q D A M N K$ sono sufficienti ad individuare la curva, bastando a tal uopo scegliere K altrove che nel punto $AM(DN)$; infatti se infinite tritome potessero passare per quei nove punti, vi sarebbe compreso anche il sistema di tre rette $L.M.P \quad I.A.Q \quad D.N.K$, il che è contro

la supposizione che K sia fuori della retta DN . — È facile verificare che il punto $AM(DN) \parallel CKbA(FKeD)$ appartiene alla tritoma, giacchè per esso la (2) diventa $KC.KF.XK$ congruenti ch'è ideutica; si possono pur determinare mediante semplici allineamenti i terzi punti sulle rette KA KD KM KN AD .

25. Nel caso particolare di $b \parallel e$ e di $A.D.K$ congruenti la congruenza (2') $XAbC.XDbF.XK$ congruenti comprende le due rette b , AD , ed una terza retta che passerà pel punto $I \parallel AC(DF)$ ed inoltre pei due $R \parallel CFbD(KC)$, $S \parallel CFbA(KF)$.

26. Il Grassmann dimostra che alla forma (2) può ridursi qualunque altra congruenza rappresentante una tritoma, e prende, per esempio, quella che io diedi (Atti, 1854, tom. VI, pag. 66) come rappresentante la costruzione del Chasles per la tritoma che passa per nove punti dati arbitrariamente; essa è un caso particolare di quella indicata dai numeri 6, 2, 2, cioè

$$(3) \quad XAbCDEf.XEh.XFe \text{ congruenti,}$$

essendo F congr. f , ed E congr. e : i nove punti dati sono E F K L M N P Q R , A è un decimo punto determinato in ispecial modo mediante i nove punti; si ha $e \parallel LE$, $f \parallel FK$, $h \parallel LK$, e le rette b d nonchè il punto C sono pure determinabili col mezzo dei nove punti. È facile verificare che a questa tritoma appartengono i punti A , E , F , $L \parallel eh$, $K \parallel fh$ e coi soliti processi di calcolo si determinano i terzi punti posti sulle quattro corde AE , AF , $EL \parallel e$, ed FL ; essi sono

$$A_1 \parallel AEbCdEf(EAh)eF(AE), \quad D_1 \parallel AFbCdEf(AFe)hE(AF)$$

$$U \parallel edCbAe, \quad V \parallel hfEdCbA(ehF).$$

Ponendo $b_1 \parallel FL \parallel ehF$, $C_1 \parallel AE(KV)$, $F_1 \parallel AF(KU)$ la congruenza (2) $XA_1b_1C_1.XD_1eF_1.K$ congruenti ha il medesimo significato della (3), perchè anch'essa comprende (veggasi il § 24) i novi punti A_1 , D_1 , K , $L_1 \parallel b_1e \parallel eh \parallel L$, $M_1 \parallel KC_1b_1 \parallel V$, $N_1 \parallel KF_1e \parallel U$, $Q_1 \parallel A_1C_1e \parallel E$, $P_1 \parallel D_1F_1b_1 \parallel F$, $I_1 \parallel A_1C_1(D_1F_1) \parallel A$

(queste riduzioni che dipendono dai soliti canoni si rendono palesi disponendo i punti sulle rette come viene espresso dalle precedenti formule), e perchè fra i nove punti tre A . E . A_1 sono in linea retta, così pure F . L . V , e non lo sono i tre F . K . U .

27. Una congruenza più semplice della precedente è la

$$(4) \quad XAd.XBe.XCf \text{ congruenti,}$$

il Grassmann giunse a dimostrare che essa è abbastanza generale per rappresentare qualunque tritoma; a tal uopo egli premette il teorema che se ABC è un triangolo inscritto in una tritoma, i cui lati non la tocchino, esiste sempre un altro triangolo inscritto anch'esso nella tritoma, i cui lati d e f incontreranno i lati del triangolo ABC in tre punti BCd ACe ABf , che appartengono essi pure alla tritoma. È poi facile riconoscere che tutti nove questi punti soddisfanno alla (4): infatti $X||A$ rende indeterminato il membro XAd ; $X||de$ riduce $XAd||X$ e $XBe||X$; e finalmente $X||BCd$ rende $XAd||X$ e la (4) diventa $X \text{ congr. } XBe(XCf)||BC$ ch'è soddisfatta.

28. *Tritoma per nove punti arbitrarii.* È degna di speciale osservazione la congruenza indicata dai numeri 5, 3, 1, cioè la

$$(5) \quad XAbC.XDeFgH.XK \text{ congruenti}$$

colla quale il Grassmann esprime la tritoma, che passa pei nove punti $A D K B E G L M N$ affatto arbitrarii; la cosa è intanto palese rispetto ai tre primi. In quanto agli altri tre $B E G$, che supponiamo rispettivamente congruenti alle rette b e g (le quali vedremo concorrere tutte tre in G), basterà che sia

$$C||BK(AE), \quad b||BG, \quad e||EG, \quad H \text{ congr. } EF$$

poichè la (5) si riduce identica ponendovi uno dei $B E G$ in luogo di X ; infatti pel solito canone VII si ha

$$BAbC.BK||BC.BK, \quad EA(EK)||E, \quad EDeFgH||EF, \quad GAbC||GC, \quad GDeFgH||GH.$$

Per ciascuno degli altri tre punti poniamo, a brevità di calcolo $XAbC(XK)||X_i, \quad XDe||X_i$;

rispetto al punto L la (5) diverrà $L_i \text{ congr. } L_iFgH$, ossia

$$L_iHg \text{ congr. } L_iF, \quad \text{alla quale si soddisfa ponendo } g \text{ congr. } L_i, \text{ perciò } g||GL_i, \text{ ed } F \text{ congr. } L_iL_i.$$

Ci rimane da compiere la determinazione di $H F$ in guisa che sieno soddisfatte le due $M_i \text{ congr. } M_iFgH, \quad N_i \text{ congr. } N_iFgH$, ossia $H \text{ congr. } M_iFgM_i, \quad H \text{ congr. } N_iFgN_i$, e siccome abbiamo trovato anche $H \text{ congr. } EF$, così il punto F dovrà rendere

$FM_iM_i.FN_iN_i.FE \text{ congruenti}$; pel § 25 questa congruenza appartiene a tre rette, di cui due sono la g e la $M_iN_i||e$, ma il punto F non può trovarsi nè sull'una nè sull'altra di queste rette, che gli stanno vicine nella formula (5), rimane adunque che F sia l'intersezione della L_iL_i colla terza retta, la quale passa pei punti

$$I || M_i M_i (N_i N_i) , R || M_i N_i g N_i (E M_i) , S || M_i N_i g M_i (E N_i) .$$

Trovato così il punto F , sarà poi H l'intersezione delle tre rette EF , $FM_i g M_i$, $FN_i g N_i$. — Con soli allineamenti si può costruire il terzo punto sulle corde AD , AK , DK , ec.

29. *Curve algebrico-razionali.* Tra le linee dell' n^{a} mo ordine meritano essere distinte quelle che possiamo dire algebrico-razionali, perchè le loro coordinate sono esprimibili razionalmente in funzioni di una sola variabile; queste curve, come osservò il Möbius (*Calc. baryc.* § 70), sono determinate mediante soli $(3n-1)$ punti, e possono costruirsi col mezzo di semplici allineamenti; sicchè invece che il punto generico X entri n volte in una congruenza, il punto X sarà dato da una formula contenente un punto arbitrario di data retta, od una retta arbitraria passante per dato punto. Così la ditoma espressa dalla congruenza $XAbCdE$ *congr.* X dà $X || abCdEa$, essendo a una retta qualsivoglia condotta pel punto A ; oppure $X || BCdE(BA)$, essendo B un punto arbitrario della retta b , ecc.

30. *Coincidenze con un elemento semiarbitrario.* Supponiamo che nella congruenza del § 28 sia $K || D$ ed indicando con d una retta arbitraria passante per D la congruenza

$$(4') \quad XAbC.XdEfGh.XD \text{ congruenti}$$

potrà scriversi $XAbC$ *congr.* $deFgHd$, e la $X || deFgHdCbAd$ mostra come si possa con soli allineamenti determinare il punto della curva che cade su ciascuna retta d . Se x è la tangente nel punto D , la $(4')$ dà $xeFgH(DAbC)$ *congr.* x ; questa congruenza esprime una *diattomena*; cioè l'involuppo di tutte le rette x è una curva della seconda classe (e perciò anche del secondo ordine, sezione-conica); se questa curva avrà due tangenti passanti pel punto D , questo sarà un punto *doppio* della tritoma; e se nessuna tangente della diattomena passi per D , questo sarà un punto *isolato* della tritoma; finalmente se la diattomena passi per D , cioè se questo sia il punto di contatto della x , la tritoma avrà in D un punto di regresso, e quindi la curva apparterrà al genere delle parabole cubiche.

31. *Ordine delle predette curve.* Nella predetta coincidenza

$X || deFgHdCbAd$ tutte le rette e i punti sono fissi eccettuata la retta d , la quale è soggetta alla condizione di passare pel punto fisso D ; perciò tra $[u, v, w]$, che servono (§ 8) a specificare la retta d vi sarà una relazione della forma $d'u + d''v + d'''w = 0$, dove d' d'' d''' sono le quantità,

i cui rapporti individuano il punto D ossia (d', d'', d''') ; perciò possiamo supporre che v sia costante e w sia funzione della u . Il punto d'intersezione della retta $[u, v, w]$ colla $[e', e'', e''']$ sarà $(e''v - e''w, e'w - e''u, e'u - e'v)$. Continuando a combinare i punti e le rette successive vedremo che il punto X sarà espresso da (x, y, z) essendo x, y, z tre funzioni razionali-interi della u non superiori al terzo ordine, sicchè il luogo dei punti X è precisamente una delle tritome algebrico-razionali, di cui facevamo parola. Peraltro può accadere che la curva sia di ordine inferiore al numero di volte che la retta indeterminata d , od un punto indeterminato, entrano nella coincidenza; e ciò perchè le x, y, z abbiano un fattore comune, tolto il quale si abbassino di grado.

32. Serva d'esempio il modo, con cui il Möbius insegna a descrivere una qualunque delle tritome algebrico-razionali. Si abbiano le tre punteggiate tra loro collineari $ABEPP'' \dots$, $BCFQQ'Q'' \dots$, $CDGRR'R'' \dots$ e si ponga $U || AQ(PC)$, $X || UD(PR)$; mentre P si muove sulla retta AB , U descrive una ditoma avente in A, C le tangenti AB, BC , ed X descrive una tritoma, che passa per A, D ed ha le tangenti AB, CD . Acciocchè i punti Q, R si muovano sulle rette BCF, CDG *collinearmente* al punto P sulla ABE , posto

$a || AF$, $c || CE$, $e || EG$, $H || ACe$, $K || BDe$, $b || BC$ sarà $Q || PCaBcA(BC)$, $R || PHbK(CD)$ (ed infatti è facile verificare che quando P coincide successivamente con A, B, E , Q ed R coincidono successivamente con B, C, F , e con C, D, G); perciò sarà $U || PCaBcA(PC)$, $X || PHbK(CD)P[PCaBcA(PC)D]$, nella prima di queste coincidenze il punto P , ch'è un punto arbitrario della retta AB , entra due sole volte, ma nella seconda esso entra quattro volte, e nulladimeno la curva dei punti X è algebrico-razionale del solo 3.º ordine.

33. *Convenzioni da adottarsi.* Desidererei, che quanto sono venuto esponendo mostrasse l'importanza di comunemente adottare una teoria, che con tanta semplicità di mezzi conduce a generali conseguenze: la segaturazione è sopra ogni altra comodissima per indicare la costruzione di una figura geometrica; io mutai il segno $\equiv$ adoperato dal Grassmann nel segno $||$, appunto per togliere la confusione, che facilmente nascerebbe se in uno stesso luogo si adoperasse uno stesso segno ora per indicare l'eguaglianza delle quantità, ora la coin-

cidenza dei punti o delle rette; anzi proporrei di adoperare *coinc.* invece del $||$, che qui usai soltanto perchè meglio saltasse all'occhio la sua differenza da *congr.*

34. *Figure intorno ad un punto.* La teoria degli allineamenti può tra sporsi dal piano alla superficie della sfera, ossia applicarsi alle figure formate intorno ad un punto (centro della sfera). Le rette ed i punti della figura piana si cangiano in piani ed in raggi (ossia, sulla superficie della sfera, in circoli ma simili ed in punti), le punteggiate e le stelle divengono stelle e *ruote*, denominando così i fasci di piani, che hanno una comune intersezione. A queste figure formate intorno ad un punto si applicano tutti i canoni del § 7.

35. *Figure nello spazio.* Il Grassmann estende la sua teoria anche allo spazio; allora ci bisogna considerare tre sorta di elementi, i punti $A B \dots$, le rette $a b \dots$ ed i piani $\alpha \beta \dots$; le coincidenze fra gli elementi della stessa specie conservano (§ 4) lo stesso significato; in quanto alle congruenze diremo che un piano ed una retta sono *congruenti* quando il piano passa per la retta, ossia la retta è posta nel piano. Ma la relazione tra un piano ed un punto gioverà distinguerla col nome d'*incidenza*, così diremo che un piano ed un punto sono *incidenti* quando il punto è situato nel piano; diremo pure che due rette sono tra loro *incidenti* quando esse sono situate in uno stesso piano, nel qual caso la loro unione determinerà a piacere un piano od un punto. Un punto può unirsi con una retta o con un altro punto, nel primo caso determina un piano e nel secondo una retta: ed un piano unendosi con una retta o con un altro piano determina un punto od una retta. — Il calcolo di queste coincidenze, congruenze ed incidenze è soggetto a canoni, di cui è sempre facile conoscere l'esattezza.

36. Il Geometra di Stettino dimostra che ogni superficie algebrica è esprimibile col mezzo di una *incidenza*, le due formule tra loro incidenti essendo costituite dal punto generico X della superficie e da elementi fissi; il numero delle volte che il punto X entra nelle due formule è, generalmente parlando, eguale all'ordine della superficie (non può mai esserne minore). Se invece del punto variabile X l'incidenza contenga un piano variabile ξ , l'involuppo di tutti i piani ξ è una superficie algebrica, la cui classe eguaglia il numero delle volte che ξ entra nell'incidenza. È noto che l'*ordine* di una superficie algebrica è il numero dei punti reali od immaginari, in cui è tagliata da ogni retta, mentre la *classe* è il numero dei tangenziali reali od immaginari, che

possono condursi per ogni retta data. (Oltre a ciò merita esser osservata la classe d'ogni sezione piana della superficie, e l'ordine d'ogni cono circoscritto alla superficie; a questo ultimo il Cayley diede il nome di rango della superficie.)

37. L'incidenza di 2.^o grado rispetto al punto X è riducibile alla forma (1) $Xabc \dots \text{incid. } X$, essendo $a b c \dots$ un numero dispari di rette fisse. Ed anzi la semplicissima $Xabc \text{ incid. } X$ rappresenta ogni superficie del secondo ordine rettilinea, che si cangia nel sistema di due piani se due delle tre rette fisse sieno tra loro incidenti. L'incidenza può anche convertirsi in coincidenza con un elemento semiarbitrario; infatti se α sia un piano passante per la data retta a sarà (2) $x \text{ coinc. } abca$ l'espressione di ciascuna delle rette x costituenti la superficie. — Tutti gl'infiniti piani α formano intorno alla retta a una ruota, un'altra ruota è quella costituita dai piani abc , i quali passano tutti per la c , ciascuna di queste ruote è prospettiva colla punteggiata b , ossia i piani corrispondenti delle due ruote tagliano la retta b in un medesimo punto; perciò le due ruote abc , α , la cui intersezione costituisce la superficie del 2.^o ordine rettilinea, sono tra loro collineari.

38. Per esprimere una superficie del 2.^o ordine convessa bisogna ricorrere ad un'incidenza contenente quattro volte il punto variabile X , il che introduce due volte il piano situato a distanza infinita. — Come le incidenze esprimono le superficie, così forse le congruenze esprimeranno le curve gobbe. — I Geometri troveranno in tutto ciò un vasto campo di studio.

Aggiungo la nota delle Memorie citate nei precedenti paragrafi e di altre di oggetto affine:

§ 43, 22. Bellavitis, *Saggio di Geom. derivata*. Acad. di Padova, IV, 1838.

§ 2. Grassmann, *Ausdehnungs-lehre oder Wissenschaft der extensiven Grösse*. Leipzig, 1844. J. Crelle, 1854, II, N. 9, pag. 423.

§ 40, 48, 49, 24, 27, 30, 34. Grassmann. J. Crelle, 1846, XXXI, N. 7, pag. 444.

§ 48, 24, 27. Grassmann. J. Crelle, 1848, XXXVI, N. 11, p. 177.

§ 21. — — — 1851, XLII, N.ri 49, 20, 21, pag. 187, 193, 204.

— — — 1852, XLIV, N. 1, pag. 1.

§ 4. Chasles, *Comptes*, 30 Mai 1853, XXXVI, pag. 943, 16 Août 1853, p. 273.

Woepeke, *Journ. Liouville*, Nov., Déc. 1854, XIX, p. 345, 407.

§ 35, 36, 37. Grassmann. J. Crelle, 1854, XLIX, N.ri 1, 2, 3, 4, 5.

Chasles. J. Liouv. Nov. 1854, XIX, p. 366.